

前 言

声学在科学技术领域、国防、日常生活等多方面的广泛应用使这门历史悠久的科学至今仍保持活力。声学的实际应用问题很少能有严密的理论解析解，但是，得力于计算机运行速度的日益提高，今天即使用身边普通的微机也能得到声学问题的数值计算解。这就大大提高了声学应用于实际问题的能力，也促进了这门科学的进一步发展。

声学的研究方向很多，比如强超声应用、超声检测、建筑声学、噪声控制、水声、声空化、冲击波、光声效应、声表面波、电声、语音信号处理等。本书仅限于讨论声场，而且主要是兆赫频率超声场的问题。这是因为作者过去长期从事医学超声方面的研究，对声场问题关心比较多。因为声学各个分支的研究现在越来越要求高度的定量化，而其中声场状况的分析是定量化的基础，所以说声场问题在声学中有重要意义。

进行声场计算要考虑的问题很多，在各项具体的研究中入手的角度和深度又往往各不相同，研究人员常常感到需要一个整体的视野和知识框架。国内现有的一些教材和参考书已经相当全面地介绍了传统的声学理论基础。不过，它们主要讨论平面波声场的问题，较少深入涉及声源开口、传播的非线性效应等实际情况。引导已有声学基础知识的年青科研人员进入当前研究应用前沿问题的书藉更不多见。本书尽量不重复述说已有参考书中给出了的基本概念和定义，而希望由重要问题的方程推导入门，探讨其物理本质、数值计算中的问题和实际应用方向，提供给读者一个更高层次的声学知识框架。本书在关键问题上提供计算源程序以便读者了解计算问题的细节。书后附有参考文献。本书内容全面综合、数理逻辑严密，具有可读性、新颖性和实用性相结合的特点，有助于读者实现从声学基础到研究前沿的跨越。

最后，作者感谢教育部“长江学者奖励计划”和南京大学提供了使作者完成本书的机会。

李太宝

2003年10月南京大学

目 录

第 1 章 声场的方程	1
1.1 理想流体中微小声波的基本方程	1
1.1.1 流体中的声波和方程	1
1.1.2 物态方程	2
1.1.3 欧拉体系、拉格朗日体系和移流加速度	2
1.1.4 忽略了移流加速度项的一维线性声方程	5
1.1.5 声压、质点速度、速度势之间的关系	5
1.1.6 与声方程相似的气象预报方程和水流方程	6
1.2 声波动方程	6
1.2.1 方程的导出	7
1.2.2 声波动方程的解 (1): 无限平面波	7
1.2.3 声波动方程的解 (2): 匹配层	8
1.2.4 偏微分方程的一般式	10
1.2.5 柱坐标系和球坐标系中的声波动方程	11
1.3 声波动方程的抛物线近似	12
1.3.1 先取波数 k_z 的近似	12
1.3.2 先作参数变换 $t' = t - z/c$	15
资料: 声的单位	16
第 2 章 差分法基础	17
2.1 一阶线性双曲型方程	17
2.1.1 一维问题的差分格式	17
2.1.2 多维问题的差分格式	20
2.2 二阶线性双曲型方程	21
2.3 抛物型方程	24
2.3.1 一维抛物型方程的差分格式	24
2.3.2 多维抛物型方程的差分格式	24
2.4 椭圆型方程	27
2.5 初始条件和边界条件	31
2.5.1 初始条件	31
2.5.2 边界条件	32

2.6	常微分方程的 Runga Kutta 数值解和气泡振动	33
第 3 章	时域差分法——流体中的声场	39
3.1	一维空间的声场	39
3.1.1	后方差格式	39
3.1.2	Lax-Friedrichs 格式	41
3.1.3	一维声场计算的应用	46
3.1.4	Lax-Friedrichs 格式的问题	47
3.1.5	Leap-frog 格式	49
3.2	多维空间声传播	57
3.2.1	Leap-frog 格式的离散差分	57
3.2.2	吸收边界	59
3.2.3	区域角点的处理	63
3.2.4	二维声场计算的应用: 聚焦声束特性	63
	资料: 电磁场的计算问题	65
第 4 章	差分法——固体中的声场	67
4.1	直角坐标系中的二维问题	67
4.1.1	一阶微分方程组	67
4.1.2	二阶声波动方程	74
4.2	柱坐标系中的固体声波方程	79
第 5 章	频域差分法——抛物线近似的声场	84
5.1	高斯分布源的声场	84
5.1.1	解析解	84
5.1.2	计算量极小的数值计算解	85
5.2	强对角系数矩阵转化为三角矩阵的算法	86
5.2.1	二维矩形空间	86
5.2.2	对称空间	91
5.2.3	三维空间	94
第 6 章	积分法——声场逆问题	104
6.1	克希荷夫公式	104
6.1.1	“绝对硬”平面壁前的声源	104
6.1.2	“绝对软”平面壁前的声源	105
6.1.3	积分法的意义: 惠更斯原理	106
6.1.4	“放置平面声源于刚性平面上”的意义	108
6.1.5	时间域表达式	109
6.1.6	二维空间的克希荷夫公式	110

6.2 瑞利积分	111
6.2.1 声源的场的计算	111
6.2.2 菲涅尔近似和夫琅禾费近似	113
6.2.3 夫琅禾费近似的意义	115
6.2.4 一样振动的矩形平面声源的声场	116
6.2.5 一样振动的圆对称源(无聚焦)	117
6.2.6 一样振动的圆凹面对称源(聚焦)	118
6.2.7 贝塞尔分布声源	121
6.2.8 相位扰乱层的影响	122
6.3 积分法和差分法的比较	125
6.4 声全息的计算	127
6.4.1 角谱	127
6.4.2 积分法逆问题:由声场信息计算反射源的分布	129
6.4.3 积分法逆问题:由声场重建声源振动面上的振动	132
6.4.4 积分法逆问题:近距离声场全息	133
6.5 声传播介质参数推定的逆问题	134
6.5.1 弱不均匀介质中的声场	134
6.5.2 小声速变动介质的声速分布和散射波的关系	136
6.5.3 由散射波信息推定介质的声速分布	137
6.5.4 声源和接受器间声波直进假设条件下的 CT 算法	140
资料:动态聚焦、脉冲压缩和合成孔径	143
第 7 章 解析法——声场和振动模式	145
7.1 固体中的声波动方程	145
7.1.1 固体的弹性系数、切变、应力和运动方程	145
7.1.2 标量速度势和向量速度势	147
7.1.3 柱、球坐标系中的算子表达式	149
7.1.4 声波动方程的一般解	149
7.1.5 边界条件	151
7.2 流体中平面波倾斜入射到弹性圆柱时的散射波	152
7.2.1 方程解析	152
7.2.2 计算程序	156
7.2.3 计算结果和实验结果	159
7.2.4 有关的几个问题	160
7.3 脉冲聚焦波束倾斜入射到弹性圆柱上的散射波	165
7.3.1 聚焦波束入射时的散射波	165

7.3.2	脉冲波入射时的散射波	166
7.4	流体中平面波垂直入射到弹性圆柱壳的散射波	169
7.5	黏弹性管内的声波方程	173
7.6	流体中平面波倾斜入射到弹性球时的散射波	175
7.6.1	方程解析	176
7.6.2	计算程序	178
7.6.3	其他有关的几个问题	180
7.7	表面波	182
第 8 章	声线法——大距离声场	186
8.1	二维空间中的三角形前方展开法	186
8.1.1	三角形的坐标和线性声速场近似	186
8.1.2	线性声速场中一根声线的轨迹	187
8.1.3	声线轨迹在三角形底边的交点和方向	189
8.1.4	声线传播时间	190
8.1.5	声线追迹数值计算例	191
8.1.6	计算程序	192
8.2	三维声线追踪的正三棱锥前向伸展算法	195
8.2.1	正三棱锥的空间参数	195
8.2.2	正三棱锥中声速场的线性近似	197
8.2.3	坐标变换	197
8.2.4	在声线所在平面内的声线追踪	201
8.2.5	新声线参数在原坐标系中的表达	201
8.2.6	计算例	203
8.3	声线法的逆问题：地层构造重建	203
8.3.1	平行层构造重建	203
8.3.2	倾斜层构造重建	206
8.4	声线法的逆问题：海洋特性构造重建	212
第 9 章	非线性波形畸变	214
9.1	保留二阶微小项的流体运动基本方程	214
9.2	保留二阶微小项的声波动方程	217
9.3	非线性声波动方程的近似分析方法：准线性法	221
9.4	非线性波形畸变的数值计算	223
9.4.1	时域差分计算	223
9.4.2	频率域计算	227
9.5	声参量阵	230

第 10 章 超声加热	233
10.1 大口径凹面声源的声场计算	233
10.1.1 椭球坐标系	233
10.1.2 椭球坐标系中的声波动方程	234
10.1.3 椭球坐标系中的流体运动基本方程	236
10.1.4 流体运动基本方程的时域差分	238
10.1.5 计算程序和结果	240
10.1.6 非线性和吸收衰减	242
10.2 声能对人体组织的作用	243
10.2.1 声能转化为热能	244
10.2.2 细胞坏死的判断	246
10.3 有关的几个重要技术	246
10.3.1 温度监测	246
10.3.2 源开口散焦以增大焦区横向宽度	247
10.3.3 抑制空化效应的激励波形	247
第 11 章 声流	248
11.1 移流加速度的时间平均	248
11.2 声流方程	249
11.2.1 质量守恒方程的时间平均	249
11.2.2 运动方程的时间平均	250
11.2.3 声场能量密度差	253
11.3 声流的计算问题	254
11.3.1 厄卡特流的数值计算	254
11.3.2 液面隆起和喷雾现象	256
第 12 章 声辐射力	258
12.1 微小物体的浮扬	258
12.1.1 驻波中的浮扬	258
12.1.2 浮扬粒子的移动和分离	260
12.2 作用于大物体上的声辐射力	261
12.3 平面波入射到平面界面上的声辐射力	263
12.4 作用于球和柱上的声辐射力	265
12.5 近源物体强力浮扬的声辐射力	267
参考文献	270

第 1 章 声场的方程

声场的数学方程描述了声现象的物理本质。既然本书讨论声场的数值计算方法,那么首先就需要了解声场方程的各种可能形式。本章讨论空气、水等流体介质中与声场方程有关的重要概念。

1.1 理想流体中微小声波的基本方程

声波是声传播介质的物质运动,由牛顿质点动力学体系描述得到流体运动基本方程。

1.1.1 流体中的声波和方程

流体介质在宏观上是连续的。以牛顿质点动力学的观点,流体介质可以看成是由许多紧密相连的微小体积元 dV 组成的。每个体积元内的介质集中在一点,质量为 ρdV 。在声扰动下,质点在平衡位置附近振动,又引起周围其他质点的振动,从而使振动由近而远传播,这种传播称之为声波。存在声波的空间称为声场。声场的特征量有声压变化量 p 、质点速度 \vec{v} 、密度变化量 ρ 和温度变化量 T 。根据牛顿质点动力学的理论可以得到描述这些特征量在空间上和时间上变化的数学方程。

首先考虑无吸收衰减、无黏性、无热传导的理想流体中的微小声波。不考虑黏性时:①没有声能转化为热能等能量形态变化,没有总能量的损耗;②在流体介质中没有切向力,也就没有横波发生。微小声波时:①没有非线性波形畸变导致的非线性吸收;②没有定向声场引起介质定向流动的问题。多大的声波才算是“微小声波”呢?空气中人的最大可听声压值也只不过约 28Pa (120dB),产生的密度变化为 $\Delta\rho=0.24\text{g}/\text{m}^3$,比静态时要小 2×10^{-4} 。房间中的高声谈话声在相距 1m 处只有约 $0.05\sim 0.1\text{Pa}$,显然属于微小声波。不过,医学超声图像诊断系统的声源表面初始声压通常为 0.5MPa ,在焦点域的最大声压达 $1\sim 5\text{MPa}$ 。在医学超声治疗系统中声源焦点域的最大声压更高达 10MPa 以上。这些都比静态标准大气压 (0.1MPa)或人体体内压(如上腕血压舒张压的典型值为 800mm 汞柱,与 760mm 汞柱的标准大气压差不多)高得多,就不能作为微小声波处理了。

描述理想流体中微小声波的基本方程由运动方程、质量守恒方程(或称为连续性方程)、物态方程三个方程组成,写为

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ p = p(\rho, T) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

共有三个方程决定 p 、 \vec{v} 和 ρ 三个变量。

1.1.2 物态方程

微小体积元 dV 由于声压的作用被压缩和膨胀,介质密度 ρ 和温度 T 发生变化。不过,通常认为体积元的压缩和膨胀过程的周期比热传导需要的时间短得多,在这个周期内体积元内外的热量来不及传递交换。所以,声传播过程被认为是绝热过程, p 与 T 无关,仅是 ρ 的函数

$$p = p(\rho) \quad (1.1.2)$$

在静态附近的一次近似展开写为

$$p = P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (1.1.3)$$

其中对 ρ 的一阶偏微分系数是一个常系数为

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} = c_0^2 \quad (1.1.4)$$

于是有

$$p = c_0^2(\rho - \rho_0) \quad (1.1.5)$$

1.1.3 欧拉体系、拉格朗日体系和移流加速度

在流体运动基本方程(1.1.1)中,比较难以理解的是其运动方程中的“质点加速度”不仅含有 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$,还含有另一项常被称为“移流加速度”的成分 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ (第 11 章有为什么称之为“移流加速度”的讨论)。据一些流体力学和声学书中描述,当速度既是时间的函数也是空间位置的函数时,只是质点空间位置的变化就可能取得一个速度增量而得到加速度 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ 。这在数学上表达为

$$\frac{D\vec{v}(t, \vec{u})}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (1.1.6)$$

怎样理解

$$\frac{D\vec{v}(t, \vec{u})}{Dt}, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (1.1.7)$$

这三个“加速度”的物理意义呢?

声场是讲“场”的问题。“场”是讲物理量在空间分布和时间变化上的特性。我

们通常所说的“声场中的质点速度 \vec{v} ”还有其他变化量 p, ρ 都是“场”量,是空间位置的物理量,在数学描述中使用静止空间的坐标 x, y, z 和时间 t (称为欧拉体系)。但是,表述物体运动特性的牛顿第二定律中诸如加速度和作用力等的物理量是就特定质点上的坐标系(称为拉格朗日体系)而言的。如图 1-1,在马拉松比赛中以放置于某一固定地点的速度计测量通过该点的运动员们的速度得到的就相当于“声场中的质点速度”。显然,除非每一个运动员的速度在任何时候都一样变化,以这样的测量记录是不能去计算某个运动员(如 A)的加速度的;运动员 A 的加速度只能由 A 本身自带的速度计测量的速度求得。

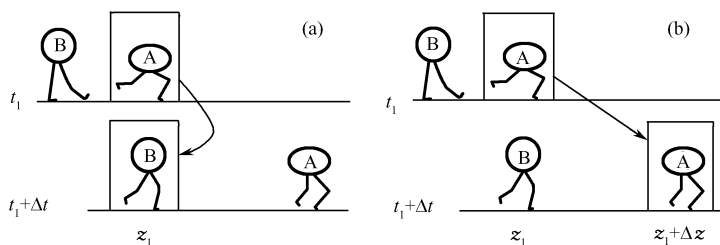


图 1-1 静止空间坐标系(欧拉体系)和质点坐标系(拉格朗日体系)

就此进一步做数学上的定量描述。设在任意位置 z 和任意时刻 t 的运动员速度为

$$v = v_0 \cos(\omega t - kz) \quad (1.1.8)$$

在时刻 t_1 运动员 A 通过 z_1 点,其速度为

$$v_{A(t_1)} = v_0 \cos(\omega t_1 - kz_1) \quad (1.1.9)$$

而在时刻 $t_1 + \Delta t$ 运动员 B 通过 z_1 点,其速度为

$$v_{B(t_1 + \Delta t)} = v_0 \cos[\omega(t_1 + \Delta t) - kz_1] \quad (1.1.10)$$

如以式(1.1.9)和(1.1.10)这两个速度之差给出“加速度”(注意,加了引号)则为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{\Delta t} &\approx \frac{v_0}{\Delta t} \left\{ \cos[\omega(t_1 + \Delta t) - kz_1] - \cos(\omega t_1 - kz_1) \right\} \\ &\approx -\frac{v_0}{\Delta t} 2 \sin(\omega t_1 - kz_1) \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

之所以“加速度”被加了引号,是因为它仅意味着相隔时间 Δt 通过同一位置 z_1 的两个运动员 A 与 B 的速度差而已,既不是 A 的加速度也不是 B 的加速度。严格来说它并没有加速度的含义,不适用牛顿第二定律。只是当 Δt 不大时,它可能反映了 A, B 两者各自加速度的平均值或可能是 A, B 各自加速度的近似值而已。

再来分析同一运动员的加速度。设在时刻 t_1 运动员 A 通过 z_1 点,速度为

$$v_{A(t_1)} = v_0 \cos(\omega t_1 - k z_1) \quad (1.1.12)$$

在时刻 $t_1 + \Delta t$ 时 A 运动到 $z_1 + \Delta z$ 点, 速度变为

$$v_{A(t_1 + \Delta t)} = v_0 \cos[\omega(t_1 + \Delta t) - k(z_1 + \Delta z)] \quad (1.1.13)$$

以这两个速度之差给出加速度(适用牛顿第二定律)为

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_0}{\Delta t} \left\{ \cos[\omega(z_1 t + \Delta t) - k(z_1 + \Delta z)] - \cos(\omega t_1 - k z_1) \right\} \\ &\approx -\frac{v_0}{\Delta t} 2 \sin(\omega t_1 - k z_1) \sin \frac{\omega \Delta t - k \Delta z}{2} \\ &\approx \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

这就出现了相当于 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ 的项。

也可以把移流项 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ 理解为加速参考系中的“惯性力”。根据质点动力学的知识, 只有在惯性(静止或匀速直线运动)参考系中, 质点的运动才遵从牛顿运动定律。而在非惯性(加速)参考系中, 除了物体相互作用的牛顿力 \vec{F} 之外, 还要引入所谓“惯性力” $\vec{f} = m \vec{a}_0$, 牛顿运动定律才在形式上仍然成立, 写为

$$\vec{F} - \vec{f} = m \vec{a}' \quad (1.1.15)$$

取非惯性参考系坐标原点 O' 在运动中的质点上, 取静止参考系坐标原点 O 在地面固定点, \vec{a}_0 是运动的原点 O' 在时刻 t_1 时相对于“静止”的原点 O 的惯性加速度

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Big|_{t_1} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.1.16)$$

可见惯性加速度相当于移流项 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ 。这就是说式(1.1.7)所列的三个“加速度”分别相当于在质点上的非惯性(加速)参考系的加速度, 静止参考系中的加速度和惯性加速度。

实际上移流项是非常小的。以水中频率 $1.5/(2\pi)$ MHz、声压幅度 1 MPa(标准大气压的 10 倍)的平面波条件, 有

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right| \approx \omega v_0 = \frac{\omega p_0}{\rho_0 c_0} \propto 10^6 \quad (1.1.17)$$

和

$$\left| \frac{v \partial v}{\partial z} \right| \approx k v_0^2 = \frac{k p_0^2}{(\rho_0 c_0)^2} \propto 10^3 \quad (1.1.18)$$

可见, 移流项 $\frac{v \partial v}{\partial z}$ 是一个小于 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 的千分之一的高次微小量。另外, 工业上能做到的空气中 ($\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$, $c_0 = 332 \text{ m/s}$) 连续波的最高强度约为 1 W/cm^2 (声压幅度 $p_0 \approx 2.05 \times 10^3 \text{ Pa}$, 即便是超声频率也可能对人耳产生损伤), 对此有

$$\left| \frac{v \partial v / \partial z}{\partial v / \partial t} \right| \approx \frac{k p_0^2 / (\rho_0 c_0)^2}{\omega p_0 / (\rho_0 c_0)} = \frac{p_0}{\rho_0 c_0^2} \approx 0.014 \quad (1.1.19)$$

比之上述水中声波条件下的比值也只是大了一个数量级。考虑到日常生活中的声压为 $p_0 \approx 0.1 \text{ Pa}$ (74dB), 这个比值当然就更小了。

所以, 通常移流项是可以忽略的。

1.1.4 忽略了移流加速度项的一维线性声方程

设声波在 z 方向上传播(声压、质点速度和密度仅在 z 方向上有变化), 限于讨论微小声波(省略移流项和其他二次微小项)。由式(1.1.1)和(1.1.5), 流体运动基本方程写为

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.1.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.1.21)$$

$$p = c_0^2 (\rho - \rho_0) \quad (1.1.22)$$

将式(1.1.22)(物态方程)代入式(1.1.21)消去 ρ 后得

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (1.1.23)$$

有时也见到以体积弹性率

$$\kappa = c_0^2 \rho_0 \quad (1.1.24)$$

将式(1.1.23)中的第二个方程写为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \kappa \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.1.25)$$

的形式。

1.1.5 声压、质点速度、速度势之间的关系

由声压变化 p 可求得质点速度 v 。反之, 亦可由质点速度 v 求得 p 。他们之间的关系由运动方程给出

$$v = - \frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial z} dt \quad (1.1.26)$$

$$p = - \rho_0 \int \frac{\partial v}{\partial t} dz \quad (1.1.27)$$

引进速度势 ϕ , 则可表达为

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.1.28)$$

$$p = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.1.29)$$

对在 $+z$ 方向行进的单一频率 ω 的平面波

$$\phi = \phi_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (1.1.30)$$

有

$$v = jk\phi \quad (1.1.31)$$

$$p = j\omega\rho_0\phi \quad (1.1.32)$$

于是,声压和质点速度之间的关系为

$$v = \frac{p}{\rho_0 c_0} \quad (1.1.33)$$

由上式可知声压和质点速度是同相位的。至于 $-z$ 方向行进的平面声波,则有

$$v = -\frac{p}{\rho_0 c_0} \quad (1.1.34)$$

1.1.6 与声方程相似的气象预报方程和水流方程

流体运动基本方程不仅仅适用于声波。与声波这种微观而快速的疏密运动相比,气象学中大气气团的胀缩运动是一种宏观而缓慢的运动,具有与流体运动基本方程(1.1.1)相似的形式。不同之处只是大气方程中需要加进重力、科里奥利力等外力,还要受非压缩性($\partial\rho/\partial t=0$)条件、热力学第一法则(描述热的吸收释放和温度变化)、水蒸气收支平衡(水循环)三个方程的限制。数值天气预报就是由这些方程推测气压(p)、风速(\vec{v})、气温(T)和降水等现象。

流体力学中水流的问题与声波相比也是宏观而缓慢的运动。在非压缩性($\partial\rho/\partial t=0$)和定常性($\partial\vec{v}/\partial t=0$)条件下,运动方程和质量守恒方程分别简化为

$$\begin{cases} \rho\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1.1.35)$$

既然散度为零, \vec{v} 可以看作是一个势场(流场)中的方向矢量。流体力学中的问题通常是给出压力 p 后由上述方程求流速 \vec{v} 。

所以,声场数值计算的方法同样适用于气象预报和流体运动的计算。

1.2 声波动方程

由流体运动基本方程可以得到声波动方程。

1.2.1 方程的导出

流体运动基本方程(1.1.23)是含声压 p 和质点速度 v 两个变量的一阶偏微分方程组。前一式中有 v 对时间 t 的导数,两边对空间求导得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} = - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (1.2.1)$$

后一式中有 v 对空间 z 的导数,两边对时间求导得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right] \rightarrow \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \quad (1.2.2)$$

式(1.2.1)和(1.2.2)中均含有

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \quad (1.2.3)$$

两式整理消去该项后得

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.4)$$

以上推导也可以推广到三维情形(见第9章)得声波方程

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (1.2.5)$$

∇^2 为拉普拉斯算子。

1.2.2 声波方程的解(1):无限平面波

声波方程(1.2.5)只是给出了声波传播必须遵循的一般规律。至于具体场合的声传播特性还必须结合声源和边界条件才能确定。最简单的一个例子是把在一个无限大介质中单一方向行进,单一频率 ω 的声波

$$p = P(z)e^{j\omega t} \quad (1.2.6)$$

代入声波方程(1.2.4)得

$$\frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} P(z) = 0 \quad (1.2.7)$$

其解为

$$P(z) = Ae^{-jkz} + Be^{jkz} \quad (1.2.8)$$

代入式(1.2.6)后得

$$p = Ae^{j(\omega t - kz)} + Be^{j(\omega t + kz)} \quad (1.2.9)$$

右式第一项是沿 $+z$ 方向,第二项是沿 $-z$ 方向行进的平面声波。

有关平面波的其他几个表达形式有:

(1) 设 $x-z$ 平面上行进的平面波与 z 轴夹角为 θ 。在讨论平面波倾斜入射到中心轴与 z 轴平行的圆柱形材料的声散射问题时需要这样描述入射平面波。引入声波行进的波矢量

$$\vec{k} = k \cos\theta \hat{z} + k \sin\theta \hat{x} \quad (1.2.10)$$

和坐标矢量

$$\vec{r} = \hat{z} + \hat{x} \quad (1.2.11)$$

该平面波写为

$$p = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A e^{j[\omega t - k(z \cos\theta + x \sin\theta)]} \quad (1.2.12)$$

(2) 设一平面波行进在空气中时有一阵风(风速 U , 与 $+z$ 方向成一角度 α) 吹过, 或是在海洋中, 一股洋流(流速 U , 与 $+z$ 方向成一角度 α) 中行进的平面波。原来声的传播速度在各个方向上都等于 c_0 , 但风或洋流破坏了空间的各向同性。类似情况也可能出现在研究单向异性分布材料的声特性和多普勒现象中。声传播速度在 $+z$ 方向上变为

$$c_z = c_0 + U \cos\alpha \quad (1.2.13)$$

在 $+x$ 方向上变为

$$c_x = c_0 + U \sin\alpha \quad (1.2.14)$$

此种情形下的平面波在引入向量

$$\vec{k} = k_z \cos\theta \hat{z} + k_x \sin\theta \hat{x} \quad (1.2.15)$$

后写为

$$p = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A e^{j[\omega t - (k_z z \cos\theta + k_x x \sin\theta)]} \quad (1.2.16)$$

其中

$$k_z = \frac{\omega}{c_0 + U \cos\alpha}, \quad k_x = \frac{\omega}{c_0 + U \sin\alpha} \quad (1.2.17)$$

1.2.3 声波动方程的解(2): 匹配层

平面声波透过中间层的问题有实际应用背景, 涉及主要的物理概念而数学上又不很难, 有助于理解有关声波的理论解析过程。

在医学超声中, 作为传感器的压电晶片声阻抗约为 $34 \times 10^6 \text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 而人体组织的声阻抗仅有 $1.5 \times 10^6 \text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 。如直接由压电晶片向人体组织发射声波, 在分界面处的声压反射系数为

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{34 - 1.5}{34 + 1.5} = 91.5\% \quad (1.2.18)$$

大部分超声能量不能进入人体组织中去。通常必须在压电晶片和人体组织之间插入声阻抗匹配层。

如图 1-2, 厚度为 d , 特性阻抗为 $Z_2 = \rho_2 c_2$ 的中间层置于特性阻抗分别为 $Z_1 = \rho_1 c_1$ 和 $Z_3 = \rho_3 c_3$ 的两个无限介质间。平面声波由介质 1 垂直入射到中间层左侧界面上, 一部分反射回来, 另一部分透射入中间层; 当声波行进到中间层右侧界面上时, 又有一部分反射回中间层, 其余部分透射入介质 3。考虑 $+z$ 方向(入射)和 $-z$ 方向(反射)行进的声波成分, 介质 1, 2, 3 中的声压分别写为

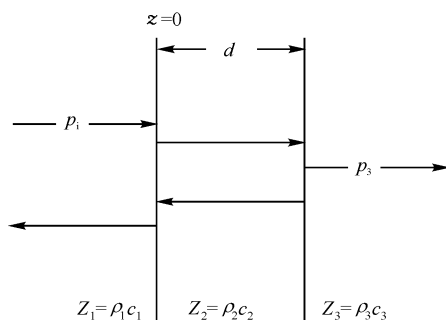


图 1-2 两个不同声阻抗的介质间插入声匹配层

$$p_1 = p_{10} e^{j(\omega t - k_1 z)} + B e^{j(\omega t + k_1 z)} \quad (1.2.19)$$

$$p_2 = C e^{j(\omega t - k_2 z)} + D e^{j(\omega t + k_2 z)} \quad (1.2.20)$$

$$p_3 = p_{30} e^{j[\omega t - k_3(z-d)]} \quad (1.2.21)$$

各处均为平面波, 于是相应的质点速度由式(1.1.33)和式(1.1.34)写为

$$v_1 = \frac{p_{10} e^{j(\omega t - k_1 z)}}{Z_1} - \frac{B e^{j(\omega t + k_1 z)}}{Z_1} \quad (1.2.22)$$

$$v_2 = \frac{C e^{j(\omega t - k_2 z)}}{Z_2} - \frac{D e^{j(\omega t + k_2 z)}}{Z_2} \quad (1.2.23)$$

$$v_3 = \frac{p_{30} e^{j[\omega t - k_3(z-d)]}}{Z_3} \quad (1.2.24)$$

由 $z=0$ 处声压连续($p_1 = p_2$)与法向质点速度连续($v_1 = v_2$)的边界条件得

$$p_{10} + B = C + D \quad (1.2.25)$$

$$\frac{p_{10}}{Z_1} - \frac{B}{Z_1} = \frac{C}{Z_2} - \frac{D}{Z_2} \quad (1.2.26)$$

同样, 由 $z=d$ 处的边界条件得

$$C e^{-jk_2 d} + D e^{jk_2 d} = p_{30} \quad (1.2.27)$$

$$\frac{C e^{-jk_2 d}}{Z_2} - \frac{D e^{jk_2 d}}{Z_2} = \frac{p_{30}}{Z_3} \quad (1.2.28)$$

以矩阵形式重写(1.2.25)~(1.2.28)四个方程得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -Z_1/Z_2 & Z_1/Z_2 \\ -1 & 0 & e^{-jk_2d} & e^{jk_2d} \\ -1 & 0 & Z_3e^{-jk_2d}/Z_2 & -Z_3e^{jk_2d}/Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{30} \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{i0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.29)$$

于是,透射到介质 3 的声压为

$$p_{30} = \frac{p_{i0} \begin{vmatrix} e^{-jk_2d} & e^{jk_2d} \\ Z_3e^{-jk_2d}/Z_2 & -Z_3e^{jk_2d}/Z_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (1.2.30)$$

Δ 是矩阵式(1.2.29)中的系数行列式。解这个行列式得到声波由介质 1 到介质 3 的声压透射系数 p_{30}/p_{i0} 。具体分析式(1.2.30)可知对前述压电晶片向人体组织发射声波的问题而言,中间插以声阻抗为

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} = \sqrt{34 \times 1.5} \approx 7.14 \times 10^6 \text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \quad (1.2.31)$$

厚度为声波波长的 1/4 的中间匹配层时,声压透过系数为 1。

不过,这一结果只是对单一频率的连续波而言。声匹配层的声压透过系数随频率变化的特性限制透过信号的带宽。一般单层匹配层只能提供 45% 的 3dB 带宽。

1.2.4 偏微分方程的一般式

流体运动基本方程(1.1.23)和声波动方程(1.2.4)都是线性偏微分方程。二阶线性偏微分方程的一般式为

$$a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial p}{\partial y} + cu = f \quad (1.2.32)$$

根据其系数分为椭圆型(描述处于物理平衡和定常态的情况,如静电磁场)

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \quad (1.2.33)$$

抛物型(描述不可逆现象,如物质扩散,热传导)

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \quad (1.2.34)$$

双曲型(描述时间可逆的物理过程,如波的传播,对流等)

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \quad (1.2.35)$$

可见,流体运动基本方程为一阶线性双曲型方程组,声波动方程为二阶线性双曲型方程。

双曲型方程问题在一定条件下可转化为抛物型方程问题(这将在下两节详细讨论)。以双曲型方程或抛物型方程表达的场,发生在某个位置的影响是局部的,所以可以步进求解,较多用差分法。双曲型方程问题也能转化为椭圆型方程问题。如在声波为单一频率成分时,取